Problemas

21/03/2012

Problema 1

Uma partícula possui uma aceleração constante $\vec{a} = \left(6\text{m/s}^2\right)\hat{i} + \left(4\text{m/s}^2\right)\hat{j}$. No tempo $t = 0$, a velocidade é nula e o vetor posição é $\vec{r_0} = (10\text{m})\,\hat{i}$. (a) Determine os vetores velocidade e posição em qualquer tempo t. (b) Obtenha a equação da trajetória da partícula no plano xy e esquematize-a.

Solução

(a)

A aceleração é constante, portanto o movimento é uniformemente variado, e podemos escrever as equações:

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}t$$

$$\vec{v} = \vec{0} + \left[(6)\,\hat{i} + (4)\,\hat{j}\right] \cdot t$$

$$\boxed{\vec{v} = (6t)\,\hat{i} + (4t)\,\hat{j}}$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

$$\vec{r} = \left[(10)\,\hat{i}\right] + \vec{0} + \frac{\left[(6)\,\hat{i} + (4)\,\hat{j}\right] \cdot t^2}{2}$$

$$\vec{r} = \left[(10)\,\hat{i}\right] + \vec{0} + \left[(3)\,\hat{i} + (2)\,\hat{j}\right] \cdot t^2$$

$$\boxed{\vec{r} = \left(10 + 3t^2\right)\hat{i} + \left(2t^2\right)\hat{j}}$$

(b)

Como mostramos no item (a), as componentes do vetor posição ($\vec{r}$) são:

$$x = 10 + 3t^2$$

$$y = 2t^2$$

Para obter a equação da trajetória, é necessário expressar y em função de x, e não mais em função de t. Isso pode ser feito primeiramente expressando t em função de x:

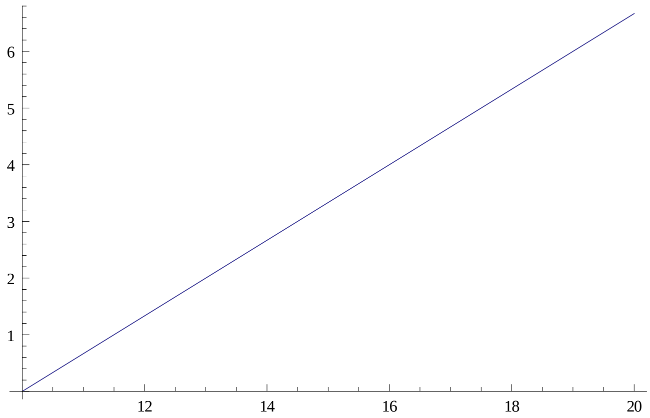
$$x = 10 + 3t^2$$

$$t^2 = \frac{x - 10}{3}$$

E depois substituindo na expressão de y:

$$y = 2t^2$$

$$\boxed{y = \frac{2}{3}(x - 10)}$$

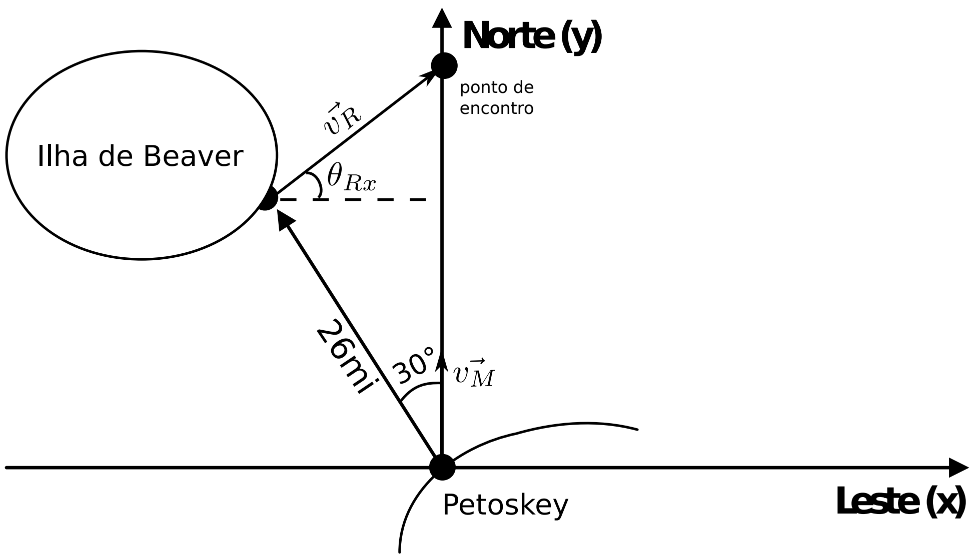


Problema 2

Maria e Roberto decidem encontrar-se no lago Michigan. Maria parte em seu barco de Petoskey às 9:00 da manhã e navega para o norte a 8 mi/h. Roberto deixa sua casa na margem da ilha de Beaver, 26 mi, 30° a noroeste de Petoskey às 10:00 da manhã e se move com velocidade constante de 6 mi/h. (a) Qual é a direção que Roberto deve tomar para interceptar Maria? (b) Onde e quando eles se encontrarão?

Solução

Adote $\hat{i}$ na direção leste e $\hat{j}$ na direção norte. Adote a origem do sistema de coordenadas em Petoskey.



A posição inicial de Maria, em Petoskey, é dada pelo vetor posição:

$$\vec{r_{M0}} = \vec{0}$$

A posição inicial de Roberto, na ilha de Beaver, é dada pelo vetor posição:

$$\vec{r_{R0}} = 26 \cdot \left[(-\sin 30°)\,\hat{i} + (\cos 30°)\,\hat{j}\right] = \left(-26\frac{1}{2}\right)\hat{i} + \left(26\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\hat{j} = (-13)\,\hat{i} + \left(13\sqrt{3}\right)\hat{j}$$

Tanto o módulo (8 mi/h) como a direção e sentido (norte) da velocidade de Maria são dados pelo enunciado. O vetor pode ser representado da seguinte forma:

$$\vec{v_M} = 8\,\hat{j}$$

Apenas o módulo (6 mi/h) da velocidade de Roberto é dado pelo enunciado. A direção e o sentido não são conhecidos. Se representarmos a direção e o sentido pelo ângulo θ_{Rx} (a ser determinado), o vetor velocidade é expresso da seguinte forma:

$$\vec{v_R} = 6 \cdot \left[(\cos\theta_{Rx})\,\hat{i} + (\sin\theta_{Rx})\,\hat{j} \right]$$

Considere o instante $t = 0$ como ocorrendo às 9:00 da manhã. Tanto Maria como Roberto se movem com velocidade vetorial constante (movimento uniforme), portanto podemos escrever as equações de posição da seguinte forma:

$$\vec{r_M} = \vec{r_{M0}} + \vec{v_M} t = \vec{0} + 8\,\hat{j} \cdot t$$

$$\vec{r_M} = (8t)\,\hat{j}$$

$$\vec{r_R} = \vec{r_{R0}} + \vec{v_R}\,(t-1) = (-13)\,\hat{i} + \left(13\sqrt{3}\right)\hat{j} + 6 \cdot \left[(\cos\theta_{Rx})\,\hat{i} + (\sin\theta_{Rx})\,\hat{j} \right] \cdot (t-1)$$

$$\vec{r_R} = (-13 + 6\cos\theta_{Rx}\,(t-1))\,\hat{i} + \left(13\sqrt{3} + 6\sin\theta_{Rx}\,(t-1)\right)\hat{j}$$

Acima, utilizamos $(t-1)$ como variável de tempo de Roberto para "corrigir" o fato de que ele saiu 1h mais tarde que Maria. Note que $t = 1 \Rightarrow (t-1) = 0$.

No instante em que Roberto intercepta Maria, temos $\vec{r_M} = \vec{r_R}$:

$$(0)\hat{i} + (8t)\,\hat{j} = (-13 + 6\cos\theta_{Rx}\,(t-1))\,\hat{i} + \left(13\sqrt{3} + 6\sin\theta_{Rx}\,(t-1)\right)\hat{j}$$

Igualando as componentes de mesma direção do lado esquerdo e do lado direito da equação, temos um sistema de duas equações e duas incógnitas (t e θ_{Rx}):

$$\begin{aligned} 0 &= -13 + 6\cos\theta_{Rx}\,(t-1) \\ 8t &= 13\sqrt{3} + 6\sin\theta_{Rx}\,(t-1) \end{aligned}$$

Por que não determinar primeiro o θ_{Rx}?

O melhor caminho para resolver este problema **não** é, como primeiro passo, determinar a direção que Roberto deve tomar para interceptar Maria. Para tentar calcular o ângulo θ_{Rx}, que dá a direção de Roberto, vamos isolar t na primeira equação do sistema:

$$0 = -13 + 6\cos\theta_{Rx}\,(t-1)$$

$$6\cos\theta_{Rx}\,(t-1) = 13$$

$$t = 1 + \frac{13}{6\cos\theta_{Rx}}$$

E substituir, então, na segunda equação do sistema, a fim de obter uma equação envolvendo somente θ_{Rx}:

$$8t = 13\sqrt{3} + 6\sin\theta_{Rx}\,(t-1)$$

$$8\left(1 + \frac{13}{6\cos\theta_{Rx}}\right) = 13\sqrt{3} + 6\sin\theta_{Rx}\left(\frac{13}{6\cos\theta_{Rx}}\right)$$

$$\frac{8}{13} + \frac{4}{3\cos\theta_{Rx}} = \sqrt{3} + \tan\theta_{Rx}$$

$$\frac{4}{3}\sec\theta_{Rx} - \tan\theta_{Rx} = \sqrt{3} - \frac{8}{13}$$

A equação acima é transcendental. Caso resolvida com o auxílio de um computador, obtemos dois valores possíveis de θ_{Rx}: $14,65°$ e $69,04°$. Entretanto, existe uma forma de resolver este problema sem utilizar um computador, que será descrita a seguir.

Calculando primeiramente o tempo de encontro (t)

Se tentarmos resolver o sistema determinando primeiramente t em vez de θ_{Rx}, chegaremos a uma equação de segundo grau, que pode ser resolvida com uma calculadora comum. Para isso, isolaremos $\cos\theta_{Rx}$ e $\sin\theta_{Rx}$ no sistema de equações:

$$0 = -13 + 6\cos\theta_{Rx}\,(t-1) \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_{Rx} = \frac{13}{6\,(t-1)}$$

$$8t = 13\sqrt{3} + 6\sin\theta_{Rx}\,(t-1) \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_{Rx} = \frac{8t - 13\sqrt{3}}{6\,(t-1)}$$

Utilizamos, então, a conhecida relação trigonométrica:

$$(\sin\theta_{Rx})^2 + (\cos\theta_{Rx})^2 = 1$$

$$\left(\frac{8t-13\sqrt{3}}{6\,(t-1)}\right)^2 + \left(\frac{13}{6\,(t-1)}\right)^2 = 1$$

$$\frac{\left(64t^2 - 208\sqrt{3}t + 507\right) + (169)}{36t^2 - 72t + 36} = 1$$

$$64t^2 - 208\sqrt{3}t + 676 = 36t^2 - 72t + 36$$

$$28t^2 + \left(72 - 208\sqrt{3}\right)t + 640 = 0$$

Resolvendo a equação de segundo grau acima, obtemos dois valores possíveis para t:

$$t = \frac{-72 + 208\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(72 - 208\sqrt{3}\right)^2 - 4\cdot 28\cdot 640}}{2\cdot 28}$$

$$\boxed{t_1 = 3,240\text{h}}\ \text{(às 12:14:22)} \qquad \text{e} \qquad \boxed{t_2 = 7,056\text{h}}\ \text{(às 16:03:21)}$$

Já os dois valores possíveis de θ_{Rx} podem ser calculados a partir de uma das duas equações do sistema, por exemplo:

$$\cos\theta_{Rx} = \frac{13}{6\,(t-1)}$$

$$\theta_{Rx} = \arccos\left(\frac{13}{6\,(t-1)}\right)$$

$$\boxed{\theta_{Rx_1} = 14,65^\circ} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\theta_{Rx_2} = 69,04^\circ}$$

O local onde eles se encontram pode ser obtido de uma das expressões dos vetores posição ($\vec{r_M}$ ou $\vec{r_R}$, sendo que $\vec{r_M}$ é muito mais fácil de calcular):

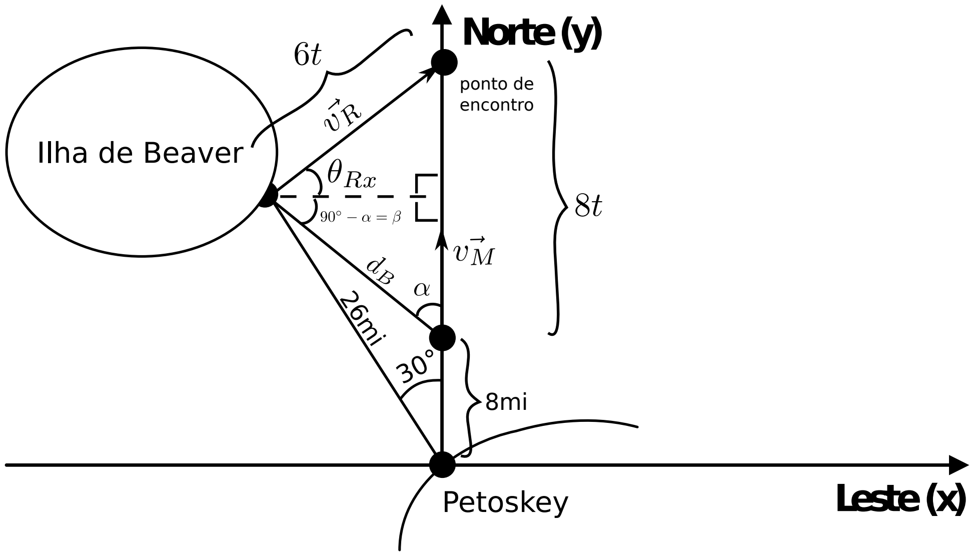
$$\vec{r_M} = (8t)\,\hat{j}$$

$$\vec{r}_{\text{encontro}_1} = (8\cdot t_1)\,\hat{j} = \boxed{(25,92\,\text{mi})\,\hat{j}}$$

$$\vec{r}_{\text{encontro}_2} = (8\cdot t_2)\,\hat{j} = \boxed{(56,45\,\text{mi})\,\hat{j}}$$

Solução alternativa

É possível resolver o problema, também, de forma geométrica.



Primeiramente, determinamos as coordenadas da ilha de Beaver:

$$\vec{r_B} = 26 \cdot \left[(-\sin 30^\circ)\, \hat{\imath} + (\cos 30^\circ)\, \hat{\jmath} \right] = \left(-26\frac{1}{2} \right) \hat{\imath} + \left(26\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \hat{\jmath} = (-13)\, \hat{\imath} + \left(13\sqrt{3} \right) \hat{\jmath}$$

Desta forma, passamos a saber o comprimento dos catetos do triângulo-retângulo cuja hipotenusa liga Beaver a Petoskey. Agora podemos calcular o ângulo α e a distância d_B corrigidas devido ao fato de Maria ter partido 1h antes de Roberto (consideramos $t = 0$ às 10:00). Para isso, vamos trabalhar no triângulo-retângulo cuja hipotenusa é d_B.

$$d_B^2 = \left(13\sqrt{3} - 8 \right)^2 + (13)^2 \quad \Rightarrow \quad d_B = 19,4868\text{mi}$$

$$\tan \alpha = \frac{13}{13\sqrt{3} - 8} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 41,8452^\circ$$

Da figura, notamos que o ângulo $\beta = 90^\circ - \alpha = 48,1548^\circ$.

Seja o ângulo $\gamma = \theta_{Rx} + \beta$. Agora, podemos utilizar a Lei dos Senos no triângulo cujos lados são $8t$, $6t$ e d_B:

$$\frac{\sin \alpha}{6t} = \frac{\sin \gamma}{8t} \quad \Rightarrow \quad \sin \gamma = \frac{4}{3} \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arcsin \left(\frac{4}{3} \sin (48,1548^\circ) \right)$$

$$\gamma = \arcsin (0,889493) = 62,8096^\circ$$

Entretanto, note que a função arcsin da calculadora só retorna ângulos entre 0° e 90°. Nada impede, na geometria do problema, que o ângulo $\gamma = \theta_{Rx} + \beta$ seja maior que 90°. Perceba que:

$$\sin (180^\circ - \gamma) = \sin (180^\circ) \cos (\gamma) - \sin (\gamma) \cos (180^\circ) = \sin (\gamma)$$

O fato de que $\sin (180^\circ - \gamma) = \sin (\gamma)$ também pode ser percebido observando um ciclo trigonométrico. Isso mostra que devemos considerar, além do ângulo γ, o ângulo $\gamma' = 180^\circ - \gamma = 117,1904^\circ$.

Como $\gamma = \theta_{Rx} + \beta$, podemos calcular:

$$\theta_{Rx} = \gamma - \beta = 62,8096^\circ - 48,1548^\circ = \boxed{14,65^\circ}$$

$$\theta'_{Rx} = \gamma' - \beta = 117,1904^\circ - 48,1548^\circ = \boxed{69,04^\circ}$$

O tempo de encontro pode ser calculado utilizando o triângulo-retângulo cuja hipotenusa tem comprimento $6t$:

$$\cos \theta_{Rx} = \frac{13}{6t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{13}{6} \sec \theta_{Rx}$$

$$t = \frac{13}{6}\sec(14,6548°) = \boxed{2,240\text{h}}\,(\text{às 12:14:22})$$

$$t' = \frac{13}{6}\sec(69,0356°) = \boxed{6,056\text{h}}\,(\text{às 16:03:21})$$

Sabe-se que a coordenada x do ponto de encontro é zero. A coordenada y do ponto de encontro pode ser calculada por $y = 8 + 8t$:

$$y = 8 + 8 \cdot 2,240 = \boxed{25,92\text{mi}}$$

$$y' = 8 + 8 \cdot 2,240 = \boxed{56,45\text{mi}}$$

Citações

Os problemas foram baseados em trechos do livro Física, volume 1, 5^a edição, de Tipler & Mosca, sendo utilizados aqui somente para fins de estudo, crítica ou polêmica.