Problemas

27/03/2012

Problema 1

Duas pessoas puxam cordas horizontais ligadas a um barco que tem massa de 200 kg da maneira mais forte que podem. Se elas puxam na mesma direção, o barco tem aceleração de 1,52 m/s² para a direita. Se elas puxam em direções opostas, o barco tem aceleração de 0,518 m/s² para a esquerda. Qual é a força exercida por cada pessoa sobre o barco? (Despreze quaisquer outras forças horizontais sobre o barco)

Solução

Denominaremos F_1 e F_2 os módulos das forças exercidas por cada uma das pessoas. Pela segunda Lei de Newton, quando as duas pessoas puxam o barco na mesma direção, temos:

$$F_R = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad F_1 + F_2 = m \cdot a_m \quad \Rightarrow \quad F_1 + F_2 = 200 \cdot 1,52 = 304$$

De forma semelhante, quando elas puxam o barco em direções opostas, temos:

$$F_R = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad F_1 - F_2 = m \cdot a_o \quad \Rightarrow \quad F_1 - F_2 = 200 \cdot (-0,518) = -103,6$$

Somando as duas equações, temos:

$$2 \cdot F_1 = 304 - 103,6 = 200,4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_1 = 100,2\text{N}}$$

Substituindo em uma das equações para obter a outra força:

$$F_1 + F_2 = 304 \quad \Rightarrow \quad F_2 = 304 - F_1 = 304 - 100,2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_2 = 203,8\text{N}}$$

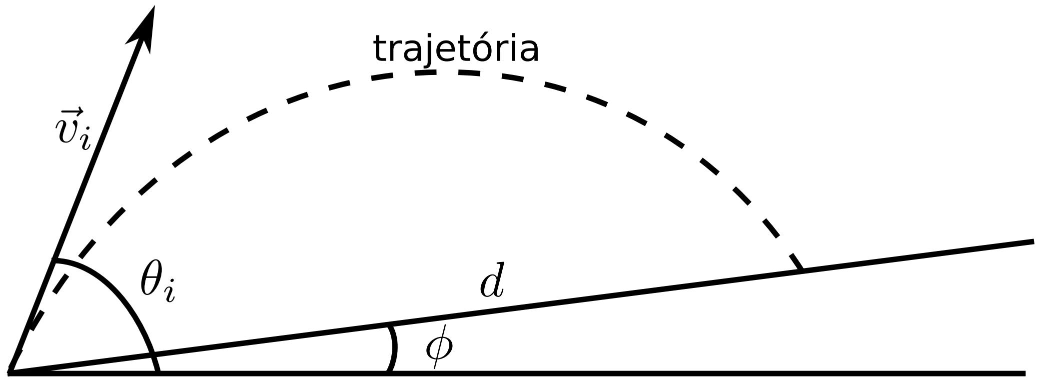
Sendo que F_1 corresponde à pessoa que estava puxando para a direita e F_2 à pessoa que estava puxando para a esquerda na situação em que elas puxam em direções opostas.

Problema 2

Um projétil é lançado em direção a um plano inclinado (ângulo de inclinação ϕ) com uma velocidade escalar inicial v_i a um ângulo θ_i com relação à horizontal ($\theta_i > \phi$). (a) Mostre que o projétil viaja a uma distância d ao longo do plano inclinado, em que

$$d = \frac{2v_i^2 \cos\theta_i \sin(\theta_i - \phi)}{g\cos^2\phi}$$

(b) Para qual valor de θ_i é máxima a distância d, e qual é esse valor máximo?



Solução

(a)

Considere a origem do sistema de coordenadas no ponto do qual o projétil é lançado.

Primeiramente, escrevemos a equação da reta $y_R(x)$ que descreve a superfície do plano inclinado:

$$\tan\phi = \frac{y_R}{x} \quad \Rightarrow \quad y_R = x \cdot \tan\phi$$

Em seguida, encontramos a equação $y_T(x)$ da trajetória do projétil:

$$x = v_i \cos\theta_i \cdot t$$

$$y_T = v_i \sin\theta_i \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Isolando t na primeira equação e substituindo na segunda:

$$t = \frac{x}{v_i \cos\theta_i}$$

$$y_T = \frac{v_i \sin\theta_i \cdot x}{v_i \cos\theta_i} - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_i^2 \cos^2\theta_i} \quad \Rightarrow \quad y_T = x \cdot \tan\theta_i - x^2 \cdot \frac{g}{2v_i^2 \cos^2\theta_i}$$

Para que o projétil colida com o plano inclinado, é necessário que $y_R = y_T$ em um mesmo x:

$$y_R = y_T \quad \Rightarrow \quad x \cdot \tan\phi = x \cdot \tan\theta_i - x^2 \cdot \frac{g}{2v_i^2 \cos^2\theta_i}$$

$$0 = x \cdot (\tan\theta_i - \tan\phi) - x^2 \cdot \frac{g}{2v_i^2 \cos^2\theta_i}$$

$$0 = x \cdot \left[(\tan\theta_i - \tan\phi) - x \cdot \frac{g}{2v_i^2 \cos^2\theta_i}\right]$$

Além da solução trivial $x = 0$ (quando o projétil está na origem, na base do plano inclinado), a outra solução para a equação acima é:

$$(\tan\theta_i - \tan\phi) - x \cdot \frac{g}{2v_i^2 \cos^2\theta_i} = 0$$

$$x = \frac{2v_i^2 \cos^2\theta_i}{g} (\tan\theta_i - \tan\phi)$$

Mas, observando o triângulo-retângulo formado pelo plano inclinado, sabemos que $\cos\phi = \frac{x}{d}$. Assim, podemos determinar d:

$$d = \frac{x}{\cos\phi} = \frac{2v_i^2 \cos^2\theta_i}{g\cos\phi} (\tan\theta_i - \tan\phi)$$

$$d = \frac{2v_i^2 \cos^2\theta_i}{g\cos^2\phi} \left(\frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i}\cos\phi - \frac{\sin\phi}{\cos\phi}\cos\phi\right) = \frac{2v_i^2 \cos\theta_i}{g\cos^2\phi} (\sin\theta_i \cos\phi - \sin\phi\cos\theta_i)$$

$$\boxed{d = \frac{2v_i^2 \cos\theta_i \sin(\theta_i - \phi)}{g\cos^2\phi}}$$

(b)

A distância é máxima quando a derivada é zero ($\frac{d}{d\theta_i}d = 0$):

$$\frac{d}{d\theta_i}d = \frac{2v_i^2}{g\cos^2\phi}\left[-\sin\theta_i \sin(\theta_i - \phi) + \cos\theta_i \cos(\theta_i - \phi)\right] = 0$$

$$\cos\theta_i \cos(\theta_i - \phi) - \sin\theta_i \sin(\theta_i - \phi) = 0$$

$$\cos\left[\theta_i + (\theta_i - \phi)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\theta_i - \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\theta_i = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}}$$

Substituindo na expressão para d, obtemos a distância máxima:

$$d = \frac{2v_i^2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)}{g\cos^2\phi} = \frac{2v_i^2}{g\cos^2\phi}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\phi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\phi}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\phi}{2} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\phi}{2}\right)$$

$$d = \frac{v_i^2}{g\cos^2\phi}\left(\cos\frac{\phi}{2} - \sin\frac{\phi}{2}\right)^2 = \frac{v_i^2}{g\cos^2\phi}\left(\cos^2\frac{\phi}{2} - 2\cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\phi}{2} + \sin^2\frac{\phi}{2}\right)$$

$$\boxed{d = \frac{v_i^2}{g\cos^2\phi}\left(1 - \sin\phi\right)}$$

Citações

Os problemas foram baseados em trechos do livro Princípios de Física, de Raymond A. Serway e John W. Jewett, Jr., sendo utilizados aqui somente para fins de estudo, crítica ou polêmica.