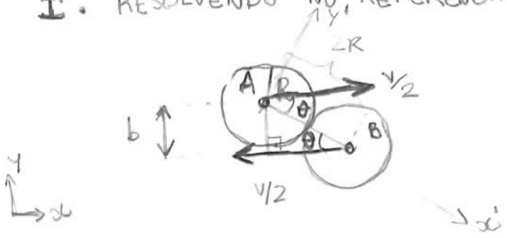
I. RESOLVENDO NO REFERENCIAL DO CENTRO DE MASSA



NO REF. DO C.M., OS DISCOS POSSUEM AS VELOCIDADES REPRESENTADAS NO DIAGRAMA À ESQUERDA

onde

$$\boxed{\sin\theta = \frac{b}{2R}}$$

COMO A FORÇA DE CONTATO É NA DIREÇÃO QUE LIGA O CENTRO DOS DISCOS, CASO ADOTEMOS UM SISTEMA DE COORDENADAS x' y' COMO O DA FIGURA, APENAS A COMPONENTE x' DAS VELOCIDADES DOS DISCOS SERÁ ALTERADA APÓS A COLISÃO, POIS A COMPONENTE y' DA FORÇA DE CONTATO É NULA.

COMO OS DISCOS TÊM MESMA MASSA E A COLISÃO É ELÁSTICA, PODE-SE PROVAR QUE A COLISÃO FAZ COM QUE AS VELOCIDADES DOS CORPOS (COMPONENTE x') SEJA TROCADA ENTRE ELES:

LEMA (I)

CONSERVAÇÃO DE MOMENTUM:

$$\cancel{m}v_{Ai} + \cancel{m}v_{Bi} = \cancel{m}v_{Af} + \cancel{m}v_{Bf} \Rightarrow v_{Ai} + v_{Bi} = v_{Af} + v_{Bf}$$

$$\Rightarrow v_{Af} - v_{Ai} = -(v_{Bf} - v_{Bi}) \quad (1)$$

CONSERVAÇÃO DE ENERGIA:

$$\frac{\cancel{m}v_{Ai}^2}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{m}v_{Bi}^2}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{m}v_{Af}^2}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{m}v_{Bf}^2}{\cancel{2}} \Rightarrow v_{Ai}^2 + v_{Bi}^2 = v_{Af}^2 + v_{Bf}^2$$

$$\Rightarrow v_{Af}^2 - v_{Ai}^2 = -(v_{Bf}^2 - v_{Bi}^2)$$

$$\Rightarrow (v_{Af} - v_{Ai})(v_{Af} + v_{Ai}) = -(v_{Bf} - v_{Bi})(v_{Bf} + v_{Bi}) \quad (2)$$

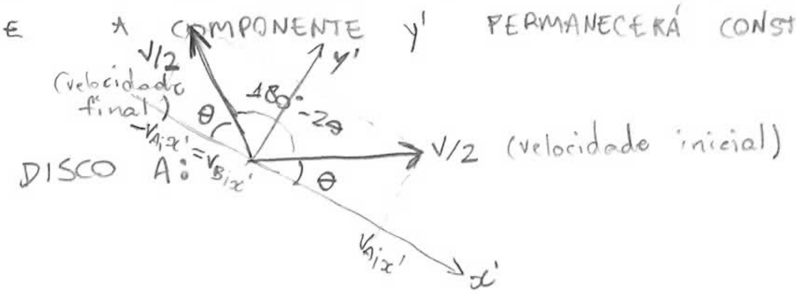
USANDO (1) em (2): $v_{Af} + v_{Ai} = v_{Bf} + v_{Bi}$

SOMANDO COM (1): $2v_{Af} = 2v_{Bi} \Rightarrow \boxed{v_{Af} = v_{Bi}}$

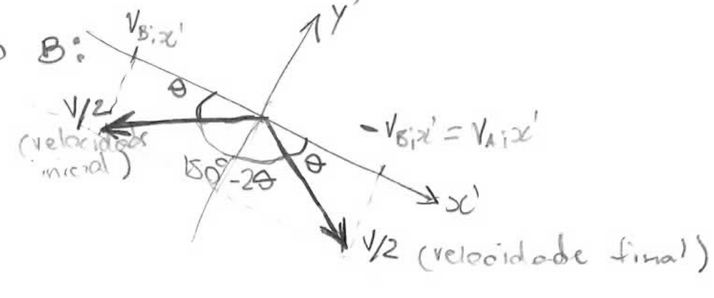
USANDO EM (1). $\boxed{v_{Bf} = v_{Ai}}$ ∎

DESTA FORMA, A COMPONENTE x' DA VELOCIDADE DE UM DISCO VAI TROCAR COM A DO OUTRO (EQUIVALENTE A UMA TROCA DE SINAL — VER FIGURA), E A COMPONENTE y' PERMANECERÁ CONSTANTE.

DISCO A:



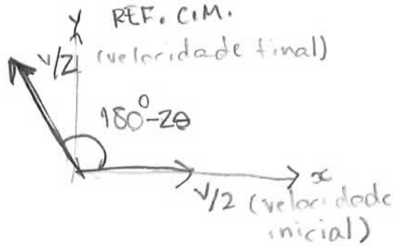
DISCO B:



II. PASSANDO PARA O REFERENCIAL DO LABORATÓRIO

PARA ISSO, DEVEMOS SOMAR VETORIALMENTE ÀS VELOCIDADES FINAIS A VELOCIDADE DO CENTRO DE MASSA COM RELAÇÃO AO LABORATÓRIO, QUE É $\frac{V}{2}\hat{x}$:

DISCO A:



DECOMPONDO A VELOCIDADE FINAL:

$$V_{Ay_{CM}} = \frac{V}{2}\sin(180° - 2\theta) = \frac{V}{2}\sin(2\theta) = V.\sin\theta\cos\theta$$

$$V_{Ax_{CM}} = \frac{V}{2}\cos(180° - 2\theta) = \frac{V}{2}(-\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

SOMANDO $\frac{V}{2}\hat{x}$ (VELOCIDADE DO C.M.), TEMOS:

$$V_{Ay} = V_{Ay_{CM}} = V\sin\theta\cos\theta$$

$$V_{Ax} = V_{Ax_{CM}} + \frac{V}{2} = \frac{V}{2}(-\cos^2\theta + \sin^2\theta + 1) = \frac{V}{2}(\sin^2\theta + \sin^2\theta) = V\sin^2\theta$$

CALCULANDO O MÓDULO E O ÂNGULO COM RELAÇÃO AO EIXO x:

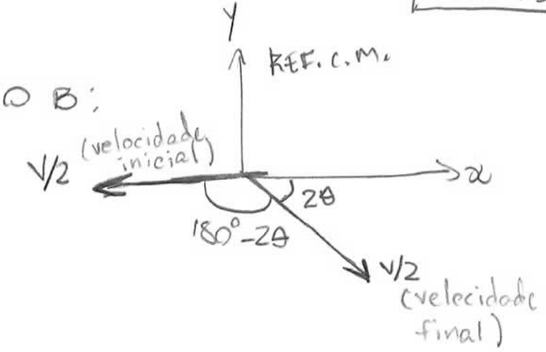
$$V_A^2 = V_{Ax}^2 + V_{Ay}^2 = V^2\sin^2\theta\cos^2\theta + V^2\sin^4\theta =$$

$$= V^2\sin^2\theta\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} \Rightarrow \boxed{V_A = V\sin\theta}$$

$$\theta_A = \arctan\left(\frac{V_{Ay}}{V_{Ax}}\right) = \arctan\left(\frac{V\sin\theta\cos\theta}{V\sin^2\theta}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\tan\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_A = 90° - \theta}$$

DISCO B:



DECOMPONDO A VELOCIDADE FINAL:

$$V_{By_{CM}} = \frac{V}{2}\sin(-2\theta) = -\frac{V}{2}\sin(2\theta) = -V\sin\theta\cos\theta$$

$$V_{Bx_{CM}} = \frac{V}{2}\cos(-2\theta) = \frac{V}{2}\cos(2\theta) = \frac{V}{2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

SOMANDO $\frac{V}{2}\hat{x}$ (VELOCIDADE DO C.M.), TEMOS:

$$V_{By} = V_{By_{CM}} = -V\sin\theta\cos\theta$$

$$V_{Bx} = V_{Bx_{CM}} + \frac{V}{2} = \frac{V}{2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 1) = \frac{V}{2}(\cos^2\theta + \cos^2\theta) = V\cos^2\theta$$

CALCULANDO O MÓDULO E O ÂNGULO COM RELAÇÃO AO EIXO x:

$$V_B^2 = V_{Bx}^2 + V_{By}^2 = V^2\sin^2\theta\cos^2\theta + V^2\cos^4\theta =$$

$$= V^2\cos^2\theta\underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{1} \Rightarrow \boxed{V_B = V\cos\theta}$$

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{V_{By}}{V_{Bx}}\right) = \arctan\left(\frac{-V\sin\theta\cos\theta}{V\cos^2\theta}\right) = \arctan(-\tan\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_B = -\theta}$$