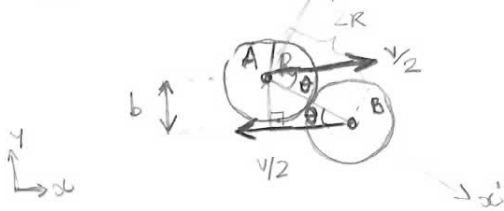


I. RESOLVENDO NO REFERENCIAL DO CENTRO DE MASSA



NO REF. DO C.M., OS DISCOS POSSUEM AS VELOCIDADES REPRESENTADAS NO DIAGRAMA A ESQUERDA

onde

$$\sin \theta = \frac{b}{2R}$$

COMO A FORÇA DE CONTATO É NA DIREÇÃO QUE LIGA O CENTRO DOS DISCOS, CASO ADOTEMOS UM SISTEMA DE COORDENADAS $x' y'$ COMO O DA FIGURA, APENAS A COMPONENTE x' DAS VELOCIDADES

DOS DISCOS SERÁ ALTERADA APÓS A COLISÃO, POIS A COMPONENTE y' DA FORÇA DE CONTATO É NULA.

COMO OS DISCOS TÊM MESMA MASSA E A COLISÃO É ELÁSTICA, PODE-SE PROVAR QUE A COLISÃO FAZ COM QUE AS VELOCIDADES NOS CORPOS (COMPONENTE x') SEJA TROCADA ENTRE ELAS:

LEMA (I)

CONSERVAÇÃO DE MOMENTUM:

$$m v_{Ai} + m v_{Bi} = m v_{Af} + m v_{Bf} \Rightarrow v_{Ai} + v_{Bi} = v_{Af} + v_{Bf}$$

$$\Rightarrow v_{Af} - v_{Ai} = -(v_{Bf} - v_{Bi}) \quad (1)$$

CONSERVAÇÃO DE ENERGIA:

$$\frac{m v_{Ai}^2}{2} + \frac{m v_{Bi}^2}{2} = \frac{m v_{Af}^2}{2} + \frac{m v_{Bf}^2}{2} \Rightarrow v_{Ai}^2 + v_{Bi}^2 = v_{Af}^2 + v_{Bf}^2$$

$$\Rightarrow v_{Af}^2 - v_{Ai}^2 = -(v_{Bf}^2 - v_{Bi}^2)$$

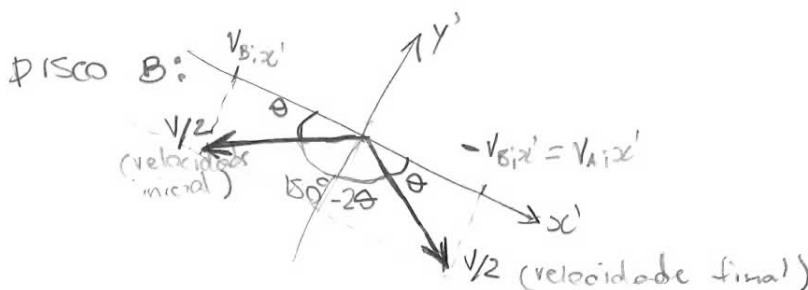
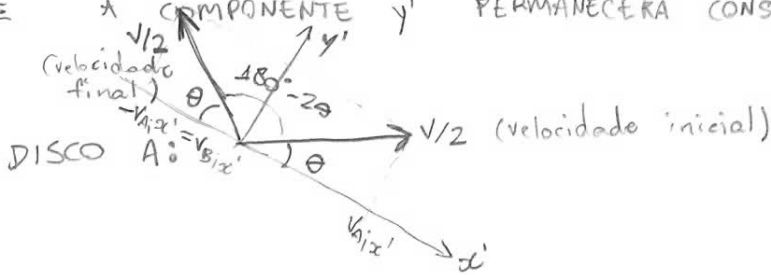
$$\Rightarrow (v_{Af} - v_{Ai})(v_{Af} + v_{Ai}) = -(v_{Bf} - v_{Bi})(v_{Bf} + v_{Bi}) \quad (2)$$

USANDO (1) em (2): $v_{Af} + v_{Ai} = v_{Bf} + v_{Bi}$

SOMANDO com (1): $2v_{Af} = 2v_{Bi} \Rightarrow v_{Af} = v_{Bi}$

USANDO EM (1): $v_{Bf} = v_{Ai}$

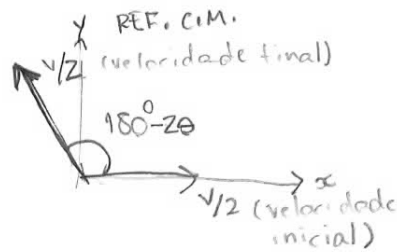
DESTA FORMA, A COMPONENTE x' DA VELOCIDADE DE UM DISCO VAI TROCAR COM A DO OUTRO (EQUIVALENTE A UMA TROCA DE SINAL - VER FIGURA), E A COMPONENTE y' PERMANECERÁ CONSTANTE.



II. PASSANDO PARA O REFERENCIAL DO LABORATÓRIO

PARA ISSO, DEVEMOS SOMAR VETORIALMENTE ÀS VELOCIDADES FINAIS A VELOCIDADE DO CENTRO DE MASSA COM RELAÇÃO AO LABORATÓRIO, QUE É $\frac{v}{2} \hat{x}$:

DISCO A:



DECOMPONDO A VELOCIDADE FINAL:

$$V_{Ay} = \frac{v}{2} \sin(180^\circ - \theta) = \frac{v}{2} \sin(\theta) = v \sin \theta \cos \theta$$

$$V_{Ax} = \frac{v}{2} \cos(180^\circ - \theta) = \frac{v}{2} (-\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

SOMANDO $\frac{v}{2} \hat{x}$ (VELOCIDADE DO C.M.), TEMOS:

$$V_{Ay} = V_{Ay} = v \sin \theta \cos \theta$$

$$V_{Ax} = V_{Ax} + \frac{v}{2} = \frac{v}{2} (-\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 1) = \frac{v}{2} (\sin^2 \theta + \sin^2 \theta) = v \sin^2 \theta$$

CALCULANDO O MÓDULO E O ÂNGULO COM RELAÇÃO AO EIXO x :

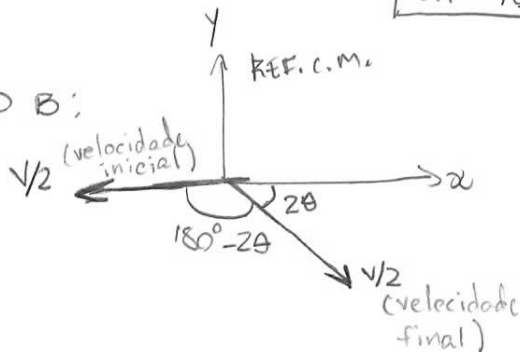
$$V_A^2 = V_{Ax}^2 + V_{Ay}^2 = v^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + v^2 \sin^4 \theta =$$

$$= v^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \Rightarrow \boxed{V_A = v \sin \theta}$$

$$\theta_A = \arctan\left(\frac{V_{Ay}}{V_{Ax}}\right) = \arctan\left(\frac{v \sin \theta \cos \theta}{v \sin^2 \theta}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\tan \theta}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_A = 90^\circ - \theta}$$

DISCO B:



DECOMPONDO A VELOCIDADE FINAL:

$$V_{By} = \frac{v}{2} \sin(-\theta) = -\frac{v}{2} \sin(\theta) = -v \sin \theta \cos \theta$$

$$V_{Bx} = \frac{v}{2} \cos(-\theta) = \frac{v}{2} \cos(\theta) = \frac{v}{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

SOMANDO $\frac{v}{2} \hat{x}$ (VELOCIDADE DO C.M.), TEMOS:

$$V_{By} = V_{By} = -v \sin \theta \cos \theta$$

$$V_{Bx} = V_{Bx} + \frac{v}{2} = \frac{v}{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 1) = \frac{v}{2} (\cos^2 \theta + \cos^2 \theta) = v \cos^2 \theta$$

CALCULANDO O MÓDULO E O ÂNGULO COM RELAÇÃO AO EIXO x :

$$V_B^2 = V_{Bx}^2 + V_{By}^2 = v^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + v^2 \cos^4 \theta =$$

$$= v^2 \cos^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \Rightarrow \boxed{V_B = v \cos \theta}$$

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{V_{By}}{V_{Bx}}\right) = \arctan\left(\frac{-v \sin \theta \cos \theta}{v \cos^2 \theta}\right) = \arctan(-\tan \theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_B = -\theta}$$